LAHENDUSED 12.KLASS

1. Vastus: $-\frac{3}{5} \le p \le 10$

Lahendus:

Esitame esialgse avaldise kujul $(15+25p)\cdot 5^x = p-10$, millest $p \ne -\frac{3}{5}$.

Kuna $5^x > 0$ mistahes x korral, siis esialgsel võrrandil puudub lahendid siis, kui kehtib võrratus $\frac{p-10}{15+25p} \le 0$.

Viimase võrratuse lahendiks on $-\frac{3}{5} < p \le 10$.

Seega $-\frac{3}{5} \le p \le 10$.

Hindamine:

Võrduse $(15+25p)\cdot 5^x = p-10$ koostamine	2p
Märkamine, et $p \ne -\frac{3}{5}$	2p
Võrratuse $\frac{p-10}{15+25p} > 0$ koostamine ja lahendamine	2p
Vastus	1p
	7p

2. <u>Vastus:</u> $\frac{3^n-1}{4\cdot 3^{n-2}}-\frac{n}{2\cdot 3^{n-1}}$

<u>Lahendus:</u>

Summa n-es liige avaldub järgmiselt: $\frac{n}{3^{n-1}}$. Seega $S_n=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{9}+\frac{4}{27}+\frac{5}{81}+...+\frac{n}{3^{n-1}}$. Jagame viimase võrduse mõlemad pooled arvuga 3. Saame

$$\frac{S_n}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\frac{5}{243}+...+\frac{n}{3^n}.$$

Järgmisena leiame vahe $S_n-\frac{S_n}{3}$. Saame

$$S_n-\frac{S_n}{3}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+...+\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{n}{3^n}.$$

Geomeetrilise jada summa ($a_1=1$, $q=\frac{1}{3}$).

Leiame summa : $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+...+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3^n-1}{3^n}=\frac{3^n-1}{2\cdot 3^{n-1}}$.

Seega $\frac{2}{3}S_n=\frac{3^n-1}{2\cdot 3^{n-1}}-\frac{n}{3^n}$, millest

$$S_n=\frac{3^n-1}{4\cdot 3^{n-2}}-\frac{n}{2\cdot 3^{n-1}}.$$

<u>Hindamine:</u>

n-es liige	1p
$\frac{S_n}{3}$ avaldis	1p
Vahe $S_n-\frac{S_n}{3}$ leidmine	2p
Summa $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+...+\frac{1}{3^{n-1}}$ leidmine	2p
Vastus	<u>1p</u>
	7p

3. Vastus: $\mathbf{98 \cdot 27 = 2646}$ **ja** $\mathbf{98 \cdot 64 = 6272}$

Lahendus:

Et $28N = 2^2 \cdot 7 \cdot N = M^3$ mingi naturaalarvu M jaoks, siis $N = 2 \cdot 7^2 \cdot K^3$, kus K on mingi naturaalarv. Seega $98 \cdot K^3$ peab olema neljakohaline arv.

Kui $K \leq 2$, siis $N \leq 8 \cdot 98$ on ülimalt kolmekohaline, samas kui $K \geq 5$, siis $N \geq 125 \cdot 98$ on vähemalt viiekohaline.

Neljakohalised arvud on $98 \cdot 3^3 = 2646$ ja $98 \cdot 4^3 = 6272$.

Hindamine:

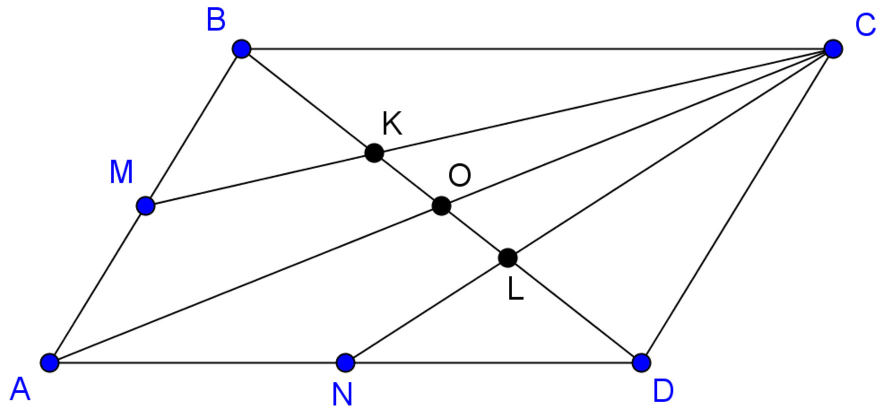
Tähelepanek, et N peab jaguma 2-ga:	1p
Tähelepanek, et N peab jaguma 49-ga:	1p
N esitatud kujul $98 \cdot K^3$:	2p
$K \leq 2$ ei sobi:	1p
$K \geq 5$ ei sobi:	1p
Leitud mõlemad õiged vastused:	1p
	7p

Märkused:

- Vastuse eest tuleb anda punkt ka juhul, kui on leitud $98 \cdot 27$ ja $98 \cdot 64$, kuid korrutised välja arvutamata või arvutatud valesti.
- Kui muud pole midagi kasulikku tehtud, anda vastuse eest 1 punkt ka juhul, kui on leitud ainult üks kahest õigest vastusest.

4.

Esimene lahendusvõimalus:



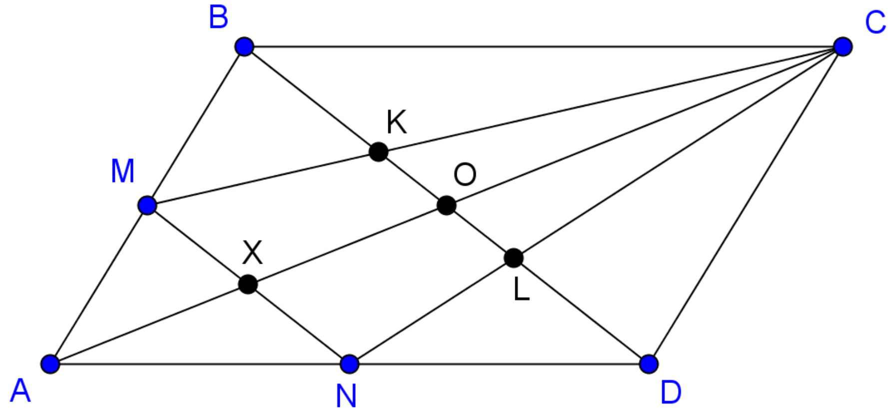
Tõmbame diagonaali AC. Olgu O diagonaalide lõikepunkt. Teame, et rööpkülikus diagonaalide lõikepunkt poolitab diagonaalid. Seega |AO|=|CO|.

Kolmnurgas ABC on nii BO kui CM mediaanid, seega on nende lõikepunkt K mediaanide lõikepunkt. Mediaanide lõikepunkt jagab mediaani suhtes 2:1. Saame

$$|BK| = \frac{2}{3}|BO| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{3}|BD|.$$

Analoogiliselt saame, et $|LD| = \frac{1}{3}|BD|$, ning seega ka $|KL| = \frac{1}{3}|BD|$. Kokkuvõttes |BK|=|KL|=|LD|.

Teine lahendusvõimalus:



Tõmbame diagonaali AC. Olgu O diagonaalide lõikepunkt. Teame, et rööpkülikus diagonaalide lõikepunkt poolitab diagonaalid. Seega |AO|=|CO|.

Lõik MN on kesklõik kolmnurgas ABD. Seega $|AX| = |XO| = \frac{1}{2}|AO|$, millest $|CO| = \frac{2}{3}|CX|$ Kuna kesklõik on paralleelne alusega, siis kolmnurgad CKL ja CMN on sarnased sarnasusteguriga $\frac{2}{3}$. Niisiis

$$|KL| = \frac{2}{3}|MN| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{3}|BD|.$$

Kuna AO on kolmnurga ABD mediaan, siis X on kesklõigu MN keskpunkt. Seega CX on kolmnurga MNC mediaan. Järelikult

$$|KO| = |OL| = \frac{1}{2}|KL| = \frac{1}{6}|BD|.$$

Nüüd aga $|BK| = |BO| - |KO| = \frac{1}{2}|BD| - \frac{1}{6}|BD| = \frac{1}{3}|BD|$. Analoogiliselt $|LD| = \frac{1}{3}|BD|$, ning seega |BK|=|KL|=|LD|.

<u>Hindamine:</u>

Esimene lahendusvõimalus:

Tõmmatud diagonaali BD:	1p
Diagonaalide lõikepunkt poolitab diagonaalid:	1p
On selgelt sõnastatud, et K on ABC mediaanide lõikepunkt:	2p
Lõikepunkt jagab mediaani suhtes 2:1:	1p
Leitud, et $|BK| = \frac{1}{3}|BD|$:	1p
Leitud, et ka |LD| ja |KL| on $\frac{1}{3}|BD|$:	<u>1p</u>
	7p

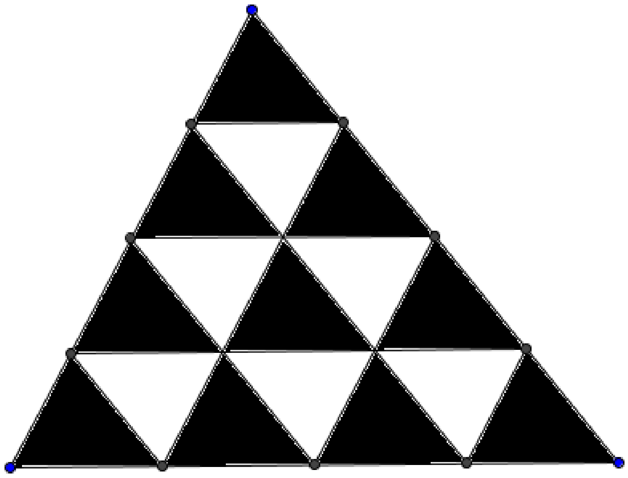
Teine lahendusvõimalus:

Tõmmatud diagonaali BD:	1p
Diagonaalide lõikepunkt poolitab diagonaalid:	1p
Näidatud, et |AX|=|XO|:	1p
Kolmnurgad CKL ja CMN on sarnased sarnasusteguriga $\frac{2}{3}$	1p
Näidatud, et $|KL| = \frac{1}{3}|BD|$:	1p
Näidatud, et $|KO| = |OL|$:	1p
Sellest leitud, et ka |BK| ja |LD| on $\frac{1}{3}|BD|$:	<u>1p</u>
	7p

5. <u>Vastus:</u> **N-1 kolmnurka**

<u>Lahendus:</u>

Värvime väikesed kolmnurgad must-valgeks nii, nagu malelaua, ehk iga kaks kolmnurka, millel on ühine külg on värvitud erineva värviga. Näiteks N = 4 puhul:



Mustasid kolmnurkasid on 1 + 2 + 3 + 4, ning valgeid 1 + 2 + 3.

N puhul mustasid kolmnurkasid on 1 + 2 + ... + (N - 1) + N, ning valgeid 1 + 2 + ... + (N - 2) + (N - 1)

Ehk mustasid kolmnurkasid on N võrra rohkem. Ja kuna hiir võib liikuda ühest kolmnurgast teise ainult siis, kui kolmnurkadel on ühine külg, siis ükskõik kuhu hiir läheb, tema kolmnurga värv muutub.

Kuna hiir võib läbida igat kolmnurka ainult ühel korral, siis maksimaalne kolmnurkade arv, mida ta saab külastada on N – 1, ning hiir alustab ja lõpetab mustas kolmnurgas.

Nüüd tuleb tõestada, et hiir saab läbida N-1 kolmnurka.

Alustame paremast nurgast (must kolmnurk).

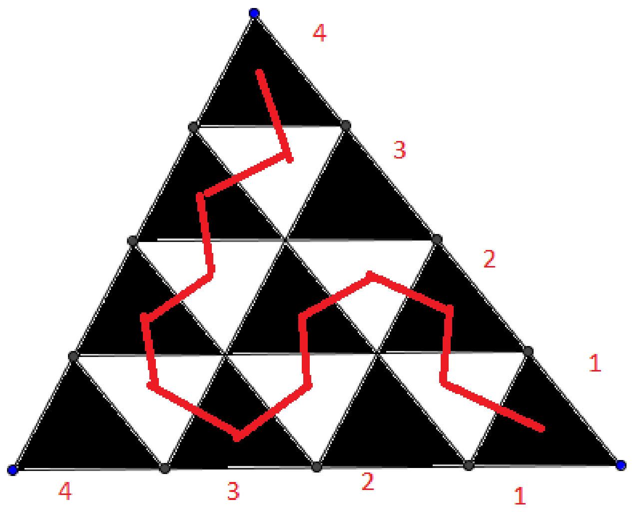
Sealt liigumee teisele reale (ainuke võimalus) ja siis rea lõppu, mis on samuti must ruut.

Sealt on ainus võimalus liikuda valgele ruudule, mis on selle musta ruudu kõrval ja mis asub kolmandas reas.

Ja siis liigume mööda seda rida vastassuunas (võrreldes eelmise rea suunaga), nii et teisel pool jääb üks must ruut külastamata.

Joonisel on punasega märgitud teekond, ning numbritega read, millest juttu on.

Ja sellisel viisil läbime kogu suure kolmnurga, ning tuleb välja, et igas reas, peale esimest jääb üks kolmnurk külastamata, mis teeb kokku N-1 kolmnurka.



Hindamine:

Tõestamine, et maksimaalne kolmnurkade arv, mida on võimalik külastada on N-1:

- Kolmnurkade värvimine must-valgeks, nii nagu lahenduses on kirjas 1p
- Seletamine, et selleks, et saada maksimaalne arv külastatud kolmnurkasid on vaja alustada ja lõpetada mustas kolmnurgas 1p
- Leidmine, et mustade kolmnurkade arv on N võrra suurem, kui valgete kolmnurkade arv 1p
- Järeldus, et maksimaalne kolmnurkade arv, mida on võimalik külastada on N-1 1p

Tõestamine, et alati on võimalik külastada N-1 kolmnurka:

- Välja toodud näide N puhul, millel on jäetud külastamata N-1 kolmnurka 3p
- Erandjuhude läbivaatamine 0p

Märkus:
Ainult õige vastuse eest anda 1p